いかにして力学系を電話で送信するか？

塚本真輝

1　Shannon(1948)の仕事

問題：周波数が$[-W,W]$に制限された信号を用いて，送信できる情報量の限界値を求めよ．信号の強度はP，ノイズは密度Nの白色ガウシアンとする．

答え：容量 $= W\log\left(1+\dfrac{P}{2NW}\right)$　ビット/秒.

この理論の位相力学系における類似を考えたい．

2　力学系とは何?

(X,T):力学系 $\Longleftrightarrow$ X:コンパクト距離化可能空間，$T:X\to X$:同相写像．

言い換えると，

力学系 $=$ $\mathbb{Z}$作用付きのコンパクト距離化可能空間．

$\mathbb{Z}$を他の群に変える一般化も考えられる．特に，群$\mathbb{R}$がコンパクト距離化可能空間に作用する時を，連続時間力学系と呼ぼう．

3 Bebutov–角谷の定理

$$C(\mathbb{R}, [0,1]) := \{f : \mathbb{R} \to [0,1] : \text{連続}\}.$$

位相はコンパクト開位相を取る．（コンパクトにはならない．）ここには$\mathbb{R}$が自然に作用する：

$$\begin{aligned}\mathbb{R} \times C(\mathbb{R}, [0,1]) &\to C(\mathbb{R}, [0,1]), \\ (a, f(t)) &\mapsto f(t+a).\end{aligned}$$

この作用の不動点集合は定数関数たち：

$$\mathrm{Fix}\,(C(\mathbb{R}, [0,1])) = [0,1].$$

任意の連続時間力学系を考える：

$$\mathbb{R} \curvearrowright X: \text{ 連続作用.}$$

この作用の不動点集合を $\mathrm{Fix}(X)$ と書こう．

$\mathbb{R} \curvearrowright X$ が $C(\mathbb{R}, [0,1])$ に埋め込めるか考えたい．

ただし，写像 $f: X \to C(\mathbb{R}, [0,1])$ が $\mathbb{R}$ 作用の埋め込みであるとは，f が $\mathbb{R}$ 作用と可換な位相的埋め込み写像であることとする．

もし$\mathbb{R} \curvearrowright X$が$C(\mathbb{R}, [0,1])$に埋め込めるなら，$\mathrm{Fix}(X)$は

$$\mathrm{Fix}(C(\mathbb{R}, [0,1])) = [0,1].$$

に位相的に埋め込める．

定理（Bebutov 1940, 角谷 1968）

連続時間力学系$\mathbb{R} \curvearrowright X$が$C(\mathbb{R}, [0,1])$に埋め込めるための必要十分条件は，$\mathrm{Fix}(X)$が$[0,1]$に位相的に埋め込めることである．

例えば，$\mathbb{R}$ が X に不動点を持たずに作用していれば，X は $C(\mathbb{R}, [0,1])$ に $\mathbb{R}$ 同変に埋め込める．

要約すると，任意の連続時間力学系 $\mathbb{R} \curvearrowright X$ を $C(\mathbb{R}, [0,1])$ に埋め込む際の障害は不動点だけである．

4　ヒルベルト立方体上のシフト

ここまでの話は連続時間力学系（$\mathbb{R}$ 作用）について研究であった．次に，$\mathbb{Z}$ 作用の場合を考えたい．

以下では，力学系は常に $\mathbb{Z}$ 作用のこととする．つまり (X, T) が力学系であるとは，X がコンパクト距離化可能空間，$T : X \to X$ が同相写像であることとする．

Bebutov–角谷の定理の$\mathbb{Z}$作用版を考えたい．それには，$C(\mathbb{R}, [0,1])$に相当するものが必要である．

単位区間$[0,1]$に対して

$$[0,1]^{\mathbb{Z}} := \cdots \times [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \times \cdots,$$

$$\sigma : [0,1]^{\mathbb{Z}} \to [0,1]^{\mathbb{Z}}, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

$\left([0,1]^{\mathbb{Z}}, \sigma\right)$は力学系（Hilbert立方体上のシフト）．これを$C(\mathbb{R}, [0,1])$の$\mathbb{Z}$作用版と考えよう．

5　Jaworskiの定理

次がこの講演で議論したい主問題である．

力学系の埋め込み問題

任意に力学系(X,T)が与えられたとき，$\left([0,1]^{\mathbb{Z}},\sigma\right)$に埋め込めるか判定せよ．

ここで，$f : X \to [0,1]^{\mathbb{Z}}$が**力学系の埋め込み**であるとは，$f \circ T = \sigma \circ f$であり，かつ$f$が位相的埋め込み写像であることとする．

埋め込みに対する明らかな障害（周期点）：各自然数 $n \geq 1$ に対して，

$$P_n(X, T) := \{x | \, T^n x = x\}.$$

もし (X, T) が $\left([0,1]^{\mathbb{Z}}, \sigma\right)$ に埋め込めるなら，各 $n \geq 1$ に対して，$P_n(X, T)$ は

$$P_n\left([0,1]^{\mathbb{Z}}, \sigma\right) = [0,1]^n$$

に位相的に埋め込める．

Jaworski (1974) は，Bebutov–角谷の定理に動機づけられて，任意の力学系を $\left([0,1]^{\mathbb{Z}}, \sigma\right)$ に埋め込む研究を始めた．そして，次の驚くべき主張を得た．

定理（Jaworski 1974）

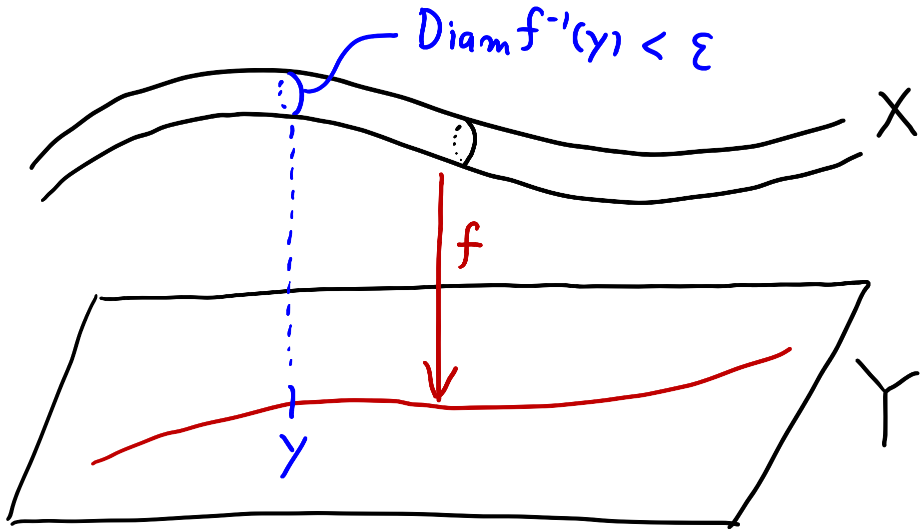
周期点を持たない有限次元力学系は $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ に埋め込める．

ここで力学系 (X,T) が有限次元であるとは，X の位相次元が有限であること．

6　古典次元論

(X, d)：コンパクト距離空間，$\varepsilon > 0$．連続写像 $f : X \to Y$ が ε-**埋め込み**であるとは，

$$\forall y \in Y : \quad \mathrm{Diam}\, f^{-1}(y) < \varepsilon.$$



$(X, \mathbf{d})$ の ε-幅次元 $\mathrm{Widim}_\varepsilon(X, \mathbf{d})$ を，「X からの ε-埋め込み

$$f : X \to P$$

が存在する単体複体 P の次元の最小値」とする．

X の位相次元を次で定める．

$$\dim X = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{Widim}_\varepsilon(X, \mathbf{d}).$$

定理（Menger–Nöbeling 1931）

$\dim X < \frac{N}{2}$ なら，X は N 次元立方体 $[0,1]^N$ に位相的に埋め込める．

7　Jaworskiの定理（revisted）

定理（Jaworski 1974）

周期点を持たない有限次元力学系は$[0,1]^{\mathbb{Z}}$に埋め込める．

雑に言えば，有限次元力学系を$[0,1]^{\mathbb{Z}}$に埋め込むための本質的な障害は周期点だけである．

これがどれくらい強い主張か考えてみよう．

(X, T) を任意の有限次元力学系とする．（周期点を持つかもしれない.）$\alpha \in \mathbb{R}$ を無理数とし，
$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の α 回転を考える：

$$R_\alpha : S^1 \to S^1, \quad x \mapsto x + \alpha.$$

(S^1, R_α) は周期点を持たない．すると力学系の直積

$$(X \times S^1, T \times R_\alpha)$$

は周期点を持たない有限次元力学系になる．したがって，$[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ に埋め込める．

Jaworskiの定理で，「有限次元」の仮定を外すとどうなる？

Auslander (1988)の質問

任意の極小力学系は$[0,1]^{\mathbb{Z}}$に埋め込めるか？

ただし，力学系(X,T)が極小であるとは，任意の$x \in X$に対して，その軌道$\{T^n x | x \in \mathbb{Z}\}$が$X$内で稠密であることとする．

X が有限集合の場合を除いて，極小力学系 (X, T) は決して周期点を持たない．

つまり，Auslander は「有限次元」という仮定を外す代わりに，周期点を持たない力学系の中で最も基本的なものを考えてみた．

Auslander の提案から 10 年後，Lindenstrauss と Weiss は平均次元という概念を用いて，問題を解決した．

8　平均次元（Gromov 1999）

(X, T)：力学系，$\mathbf{d}$：X 上の距離．
自然数 N に対して

$$\mathbf{d}_N(x, y) := \max_{0 \le n < N} \mathbf{d}(T^n x, T^n y).$$

(X, T) の平均次元を次で定める．

$$\mathrm{mdim}(X, T) := \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\lim_{N \to \infty} \frac{\mathrm{Widim}_\varepsilon(X, \mathbf{d}_N)}{N} \right).$$

直感的意味：

$$\mathrm{mdim}(X,T) = \frac{\dim X}{|\mathbb{Z}|}.$$

力学系 (X,T) の軌道を記述するのに必要な単位時間あたりの自由度が $\mathrm{mdim}(X,T)$ である．

K が良い空間（例：位相多様体，単体複体）なら，

$$\mathrm{mdim}\left(K^{\mathbb{Z}}, \text{シフト}\right) = \dim K.$$

これは直感的には

$$\mathrm{mdim}\left(K^{\mathbb{Z}}, \text{シフト}\right) = \frac{\dim K^{\mathbb{Z}}}{|\mathbb{Z}|}$$
$$= \frac{|\mathbb{Z}| \cdot \dim K}{|\mathbb{Z}|} = \dim K.$$

特に，

$$\mathrm{mdim}\left([0,1]^{\mathbb{Z}}, \sigma\right) = 1.$$

力学系 (X,T) が力学系 (Y,S) に埋め込めるなら，

$$\operatorname{mdim}(X,T) \leq \operatorname{mdim}(Y,S).$$

特に，もし (X,T) が $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ 上のシフトに埋め込めるなら

$$\operatorname{mdim}(X,T) \leq \operatorname{mdim}\left([0,1]^{\mathbb{Z}}, \sigma\right) = 1.$$

したがって，$\operatorname{mdim}(X,T) > 1$ なら，(X,T) は $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ に埋めこめない．

定理（Lindenstrauss–Weiss 2000）

任意の実数$c \geq 0$に対して，平均次元がcの極小力学系が存在する．
特に，$c > 1$とすることで，$[0,1]^{\mathbb{Z}}$に埋め込めない極小力学系が存在する．

驚くべきことに，Lindenstraussはさらに踏み込んで，平均次元が十分小さい極小力学系は$[0,1]^{\mathbb{Z}}$に埋め込めることを示した．

N 次元立方体 $[0,1]^N$ の無限直積

$$\left([0,1]^N\right)^{\mathbb{Z}} = \cdots \times [0,1]^N \times [0,1]^N \times [0,1]^N \times \cdots$$

を考える．これはシフト写像によって力学系となる．

定理（Lindenstrauss 1999）

平均次元が $\frac{N}{36}$ 未満の極小力学系は $\left([0,1]^N\right)^{\mathbb{Z}}$ に埋め込める．

Lindenstraussの定理は素晴らしい結果だが，$\frac{N}{36}$ はいかにも人工的である．

問題（Lindenstrauss 1999）

埋め込みのための**最良評価**を求めよ．

定理（Gutman-T. 2020）

平均次元が $\frac{N}{2}$ 未満の極小力学系は $\left([0,1]^N\right)^{\mathbb{Z}}$ に埋め込める．

$\frac{N}{2}$ は最良である：

定理（Lindenstrauss–T. 2014）

平均次元が $\frac{N}{2}$ に等しい極小力学系で，$\left([0,1]^N\right)^{\mathbb{Z}}$ に埋め込めないものが存在する．

「極小」の条件を外すとどうなるか？

予想（Lindenstrauss–T. 2014）

力学系 (X, T) が次の二つを満たすとせよ．

- $\mathrm{mdim}(X, T) < \frac{N}{2}$．
- 任意の自然数 n で，$\dim P_n(X, T) < \frac{nN}{2}$．

この時，(X, T) は $\left([0,1]^N\right)^{\mathbb{Z}}$ に埋め込める．

9　信号処理

$\left([0,1]^N\right)^{\mathbb{Z}}$ の点 x は

$$x = \cdots x_{-1}x_0x_1x_2x_3\cdots, \quad \text{各}\, x_n \in [0,1]^N.$$

これは $[0,1]^N$ に値をとる離散信号と見なせる．

したがって，力学系 (X,T) を $\left([0,1]^N\right)^{\mathbb{Z}}$ に埋め込む問題は，(X,T) の軌道を離散信号として符号化する方法を求めている．

我々のアプローチ：

$$\text{力学系} \xrightarrow{\text{符号化}} \text{連続信号} \xrightarrow{\text{サンプリング}} \text{離散信号}.$$

以下では，連続信号として帯域制限信号を用いる．

連続信号は離散信号よりも柔軟に分解できるため，議論の自由度が上がり，精密な結果を証明できる．

実数$a < b$を取る．有界連続関数$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$が区間$[a, b]$に帯域制限されているとは

$$\text{フーリエ変換}\quad \hat{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi t} \varphi(t)\, dt$$

のサポートが$[a, b]$に含まれることとする．

例 1. $\sin(2\pi t), \cos(2\pi t), \frac{\sin(2\pi t)}{t}$は$[-1, 1]$に帯域制限されている．

例 2. 標準的な電話信号は$[-3.4kHz, 3.4kHz]$に帯域制限されている．

寄り道（Paley–Wiener理論）

$c > 0$：正の数．有界連続関数 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が $[-c, c]$ に帯域制限される必要十分条件は，φ が整関数に拡張されて次を満たすこと：

$$|\varphi(x + yi)| \lesssim e^{2\pi c|y|}.$$

例えば，$\dfrac{\sin(\pi z)}{z} = \lim_{A\to\infty} \prod_{0<|n|<A} \left(1 - \dfrac{z}{n}\right)$ は整関数であって，$O(e^{\pi|y|})$．したがって，$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ に帯域制限されている．

区間 $[a,b]$ に帯域制限された関数 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ で，$\|\varphi\|_\infty \leq 1$ を満たすもの全体を $B[a,b]$ と書こう．

広義一様収束の位相のもとで，$B[a,b]$ はコンパクトになる．この位相は距離化可能，例えば

$$\mathbf{d}(\varphi_1, \varphi_2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^\infty([-n,n])}.$$

$B[a,b]$ は次のシフト写像のもとで力学系になる：

$$\sigma : B[a,b] \to B[a,b], \quad \varphi(t) \mapsto \varphi(t+1).$$

帯域制限信号への符号化（Gutman-T.）

非自明な極小力学系 (X,T) が

$$\mathrm{mdim}(X,T) < b - a$$

を満たせば，(X,T) は $B[a,b]$ に埋め込める．

ここで「非自明」とは，X が無限集合であることとする．

この主張にサンプリング定理を組み合わせると，離散信号版の埋め込み定理が得られる．

サンプリング定理（古典）

$b - a < 1$ の時，次の写像は単射：

$$B[a,b] \to \ell^\infty(\mathbb{Z}), \quad \varphi \mapsto \varphi|_{\mathbb{Z}} = (\varphi(n))_{n\in\mathbb{Z}}\,.$$

これを用いて，次の主張を証明してみよう：

離散信号への符号化

平均次元が $\frac{1}{2}$ 未満の極小力学系は $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ に埋め込める．

(X,T)：平均次元$< \frac{1}{2}$の非自明な極小力学系．
$0 < a < b < \frac{1}{2}$を，$\mathrm{mdim}(X,T) < b - a$となるように取る．

(X,T)は$B[a,b]$に埋め込める．

一方で，$0 < a < b < \frac{1}{2}$であることと，サンプリング定理から，次の写像は埋め込みになる：

$$B[a,b] \to [-2,2]^{\mathbb{Z}}, \quad \varphi \mapsto (\varphi + \overline{\varphi})|_{\mathbb{Z}}.$$

よって，(X,T)は$[-2,2]^{\mathbb{Z}}$に埋め込める．

10　帯域制限信号の柔軟性

$(X,T),(Y,S)$：力学系．連続全射 $\Phi : X \to Y$ が $\Phi \circ T = S \circ \Phi$ を満たす時，Φ をファクター写像と呼ぶ．

技術的定理

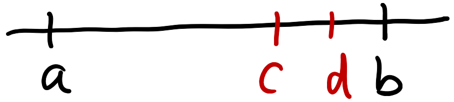
$\Phi : (X,T) \to (Y,S)$：ファクター写像，(Y,S)：非自明な極小力学系．$a < b$：実数．もし，$\mathrm{mdim}(X,T) < b - a$ なら，(X,T) は $B[a,b] \times Y$ に埋め込める．

技術的定理（再掲）

$\Phi : (X,T) \to (Y,S)$：ファクター写像，(Y,S)：非自明な極小力学系．$a < b$：実数．もし，$\mathrm{mdim}(X,T) < b - a$ なら，(X,T) は $B[a,b] \times Y$ に埋め込める．

これを用いて次を証明してみよう．

平均次元が $b - a$ 未満の非自明な極小力学系は $B[a,b]$ に埋め込める．



(X,T)：平均次元 $< b-a$ の非自明な極小力学系．$a<c<d<b$ を $\mathrm{mdim}(X,T) < c-a$ となるよう取る．

ジェネリックな射 $\Phi : (X,T) \to B[d,b]$ を取ると，$Y := \Phi(X)$ は非自明な極小力学系．

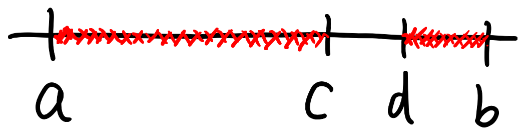
技術的定理を $\Phi : X \to Y$ に適用：(X,T) は

$$B[a,c] \times Y \subset B[a,c] \times B[d,b] \text{ に埋め込める．}$$

ところが，右辺は $B[a,b]$ に自然に埋め込める：

$$B[a,c] \times B[d,b] \to B[a,b], \quad (\varphi, \psi) \to \frac{\varphi + \psi}{2}$$

以上の議論はとても単純だが，帯域制限信号の柔軟性をよく表している．
上記の議論の主なトリックは



$$[a, c] \quad \text{と} \quad [d, b]$$

という交わらない二つの帯域をとる点にある．
これはa, bが連続パラメータだから可能な操作である．
このような柔軟性が離散信号にはない．

11　技術的定理の証明

技術的定理（改）

$\Phi\ :\ (X,T)\ \to\ (Y,S)$：ファクター写像，$(Y,S)$：非自明な極小力学系．$a<b$：実数．$\mathrm{mdim}(X,T)<b-a$とする．この時，ジェネリックな射$f:(X,T)\to B[a,b]$に対して，

$$f\times\Phi : X \to B[a,b]\times Y \quad \text{は埋め込みになる．}$$

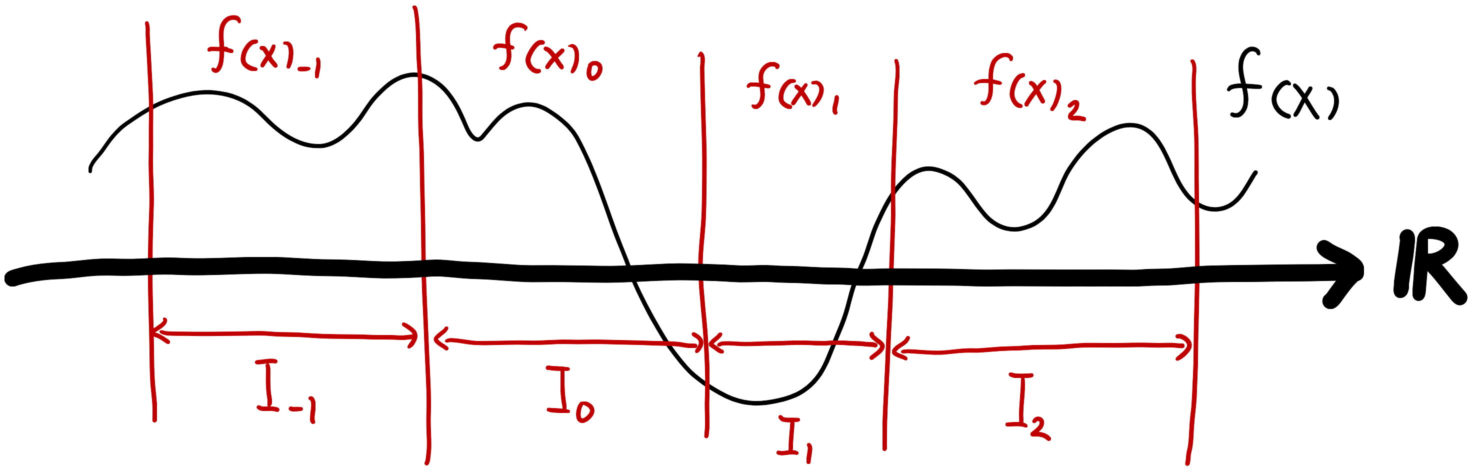
証明の方針：射 $f:(X,T)\to B[a,b]$ を任意にとる．この f を摂動して $g:X\to B[a,b]$ を作り，$g\times\Phi:X\to B[a,b]\times Y$ が埋め込みになるようにしたい．

各 $x\in X$ に対して，$f(x)\in B[a,b]$ は関数

$$f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$$

である．これを摂動して別の関数 $g(x):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を作り，$g(x)$ が x の軌道の情報を適切に記憶しているようにしたい．

<u>Step 1（セグメンテーション）.</u> 各 $x \in X$ に対して，信号 $f(x)$ は無限長．これを有限長の信号に分解：$f(x) = \cdots f(x)_{-1} + f(x)_0 + f(x)_1 + \cdots$.

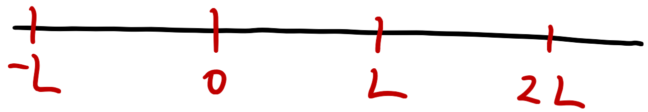


<u>Step 2.</u> 各 $f(x)_n$ を摂動して $g_n(x) : I_n \to \mathbb{C}$ を作る． $g_n(x)$ 達をくっつけて $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を得る．

セグメンテーションは次を満たす必要がある：

- 点 $x \in X$ に連続かつ $\mathbb{Z}$ 同変に依存する．
- 各区間 I_n は十分に長い．

例えば，大きい正の数 L を取って，



$$f(x)_n = f(x)|_{[nL,(n+1)L]}$$

とすると，これは有限長の信号への分解を与えるが，$\mathbb{Z}$ 同変ではないのでダメ．

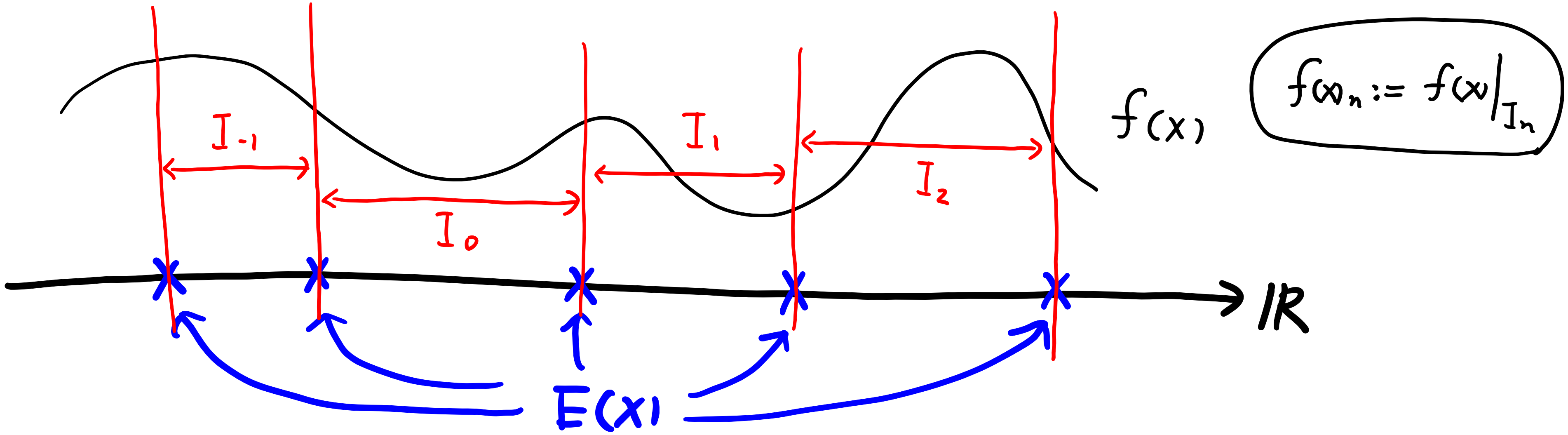
セグメンテーションのために，ファクター写像 $\Phi : (X, T) \to (Y, S)$ を使う．
(Y, S) は非自明な極小力学系だったので，任意の $L > 0$ に対して，適切に開集合 $U \subset Y$ を取ると，

- Y の全ての軌道は U と（無限回）交わる．
- 任意の $y \in Y$ に対して，もし $S^n y \in U$ かつ $S^m y \in U$ なら $|n - m| > L$．

そこで $x \in X$ に対して，

$E(x) := \{n \in \mathbb{Z} | \, S^n \Phi(x) \in U\}$: これで $\mathbb{R}$ を分割．

$E(x)$ によって，セグメンテーションが定まる．



各 I_n 上で，(X, T) の軌道の自由度はおおよそ $\mathrm{mdim}(X, T) \cdot |I_n|$．一方で，$B[a, b]$ が I_n 上で持っている自由度は約 $2(b-a) \cdot |I_n|$．

$\mathrm{mdim}(X, T) < (b-a)$ なので，I_n 上での (X, T) の情報を $f(x)_n$ の摂動 $g(x)_n$ に記憶させられる．

このようにして，$g(x) \in B[a,b]$ が定まる．すると，$g \times \Phi : X \to B[a,b] \times Y$ は埋め込みになる．

実際 $(g(x), \Phi(x)) = (g(x'), \Phi(x'))$ と仮定しよう

すると，$\Phi(x) = \Phi(x')$ より，x と x' は同じセグメンテーションを用いることになる．次に

$$g(x)|_{I_n} = g(x')|_{I_n}$$

から，x と x' の軌道の I_n 上での情報は一致する．これが全ての I_n で成立するので $x = x'$．