令和４年度

理　学　部

数物科学科 数物連携コース

第３年次編入学者選抜学力試験問題

数　　学

令和３年６月１２日（土）

１０：００～１１：３０

注 意 事 項

1．解答用紙表紙の指定された箇所に，受験番号，氏名を記入すること。
　受験番号は，受験票の受験番号欄に記入してあるとおりに書くこと。
　指定された箇所以外には，受験番号・氏名を絶対に書かないこと。
2．A1～A3 の全問（3 問）あるいは B1～B4 の全問（4 問）のいずれかを選択し，
　選択した問題を全問解答すること。
3．解答は，別冊子の解答用紙に記入すること。
　解答用紙左上の問題番号を確認し，問題に対応する解答用紙に記入すること。
4．各問題の解答用紙（両面）はそれぞれ１枚ある。
5．問題冊子の総ページ数――――――　５ページ
　　問題 A1～A3 のページ―――――　第３ページ
　　問題 B1～B4 のページ―――――　第４～５ページ
　（第１～２ページは白紙）
6．試験終了後，この問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{\textbf{A1}}$ a を実数とする．ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ を

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ が一次独立であることを示せ．

(2) ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ が一次独立とならないような a の値をすべて求めよ．

$\boxed{\textbf{A2}}$ p を $0 < p < 1$ をみたす実数とする．行列 A および数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \ a_1 = 1, \ b_1 = 0, \ \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \ (n \geqq 2)$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) $k \geqq 1$ に対し，A^k を求めよ．

(3) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = \frac{1}{2}$ であることを示せ．

$\boxed{\textbf{A3}}$ $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) a を実数とする．$y = f(x)$ の接線で点 $\mathrm{A}(a, 0)$ を通るものがちょうど 2 本存在するための a の条件を求めよ．

(3) $\displaystyle \int_0^1 f(x)dx$ を求めよ．

(4) $\displaystyle \lim_{M \to \infty} \int_0^M f(x)dx$ を求めよ．

$\boxed{\textbf{B1}}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = x - (x-a)^{2/3}$ の極値を求めよ。ただし，a は正の実数で，x は a より大きい実数とする。

(2) 3 次元の xyz 空間において，楕円体 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ の面上の点 (x_0, y_0, z_0) における接平面の方程式を求めよ。ただし， a，b，c はいずれも正の実数とする。

$\boxed{\textbf{B2}}$ 2 次元の xy 平面内の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ に関する以下の問いに答えよ。

ただし，$a > b > 0$ であり，また楕円の離心率を

$$\tilde{e} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

とする。

(1) 楕円の周囲の長さ L は

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \tilde{e}^2 \cos^2\theta}\, d\theta$$

で与えられることを示せ。

(2) 離心率 $\tilde{e}$ が 1 より十分小さいとき，長さ L は近似的に

$$L = 2\pi a \left(1 - \frac{1}{4}\tilde{e}^2\right)$$

となることを示せ。

$\boxed{\textbf{B3}}$ 時間 t $(t \geq 0)$ で関数 $x(t)$ についての次の微分方程式を考える。

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(f(t) - x(t))$$

ここで a は正の実数で，$f(t)$ は与えられた実関数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $a = \log_e 2$ で，$t \geq 0$ で $f(t) = 0$ である場合に，$x(0) = 1$ をみたす解 $x(t)$ を求めよ。

次ページに続く

(2) 一般に時間が十分に経った後の解は，$x(0)$ の値に関係なく

$$x(t) = a\int_0^t f(u)e^{a(u-t)}du$$

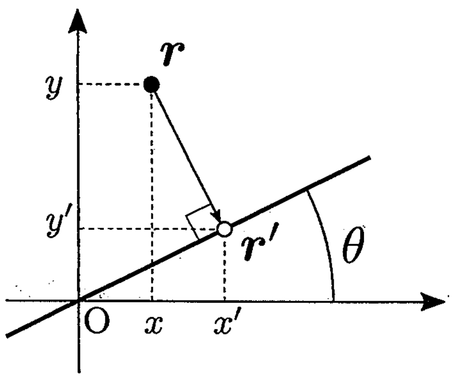
に近づくことを示せ。

(3) 次に，$a = \log_e 2$ で，関数 $f(t)$ が 0 以上の任意の整数 n について

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (2n \leq t < 2n+1) \\ 0 & (2n+1 \leq t < 2n+2) \end{cases}$$

である場合を考える。整数 N が十分大きくなったときに $x(2N)$ が近づく値を求めよ。

B4 下図のように xy 平面上の任意の点 $\boldsymbol{r} = (x, y)$ を，x 軸から角度 θ 傾いた直線に垂直に射影した点 $\boldsymbol{r}' = (x', y')$ を求める変換を考える。以下の問いに答えよ。



(1) ベクトル $\boldsymbol{r}$ と単位ベクトル $\boldsymbol{e} = (\cos\theta, \sin\theta)$ を使って，ベクトル $\boldsymbol{r}'$ を表せ。

(2) (x, y) と (x', y') の関係は 2×2 行列 A を使って一次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

として表すことができる。行列 A を求めよ。

(3) 行列 A の 2 つの固有値を計算し，それぞれの固有値に属する固有ベクトルの方向を求めよ。